TD 1 - Topologie générale

Notions du cours.

- Espace topologique, ouverts, fermés, applications continues.
- Base d'une topologie, voisinages, base de voisinages.
- Intérieur, adhérence, frontière, partie dense.
- Espaces compacts, espaces séparés (Hausdorff).
- Espaces connexes, connexes par arcs.
- Applications ouvertes, fermées, homéomorphismes.
- Topologie engendrée, topologie induite.
- Propriétés locales : espaces localement compacts, localement connexes, localement connexes par arcs.

Sauf si indiqué différemment, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont considérés en tant qu'espaces topologiques, avec la topologie induite par la distance euclidienne.

Parties d'un espace topologique.

Exercice 1.

(a) Dans $\mathbb{R}^m$ muni de la distance euclidienne, montrer qu'un ouvert n'a pas de point isolé.

(b) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on considére l'ensemble $F_n = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, q \leq n\}$. Prouver que F_n est un fermé de $\mathbb{R}$ et que ses points sont isolés.

Exercice 2. Soit X un espace topologique, et A une partie de X. On rappelle que le *dérivé* $D(A)$ de A est l'ensemble de points d'accumulations de A (i.e., les points $x \in X$ tels que pour tout voisinage V de x, $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

(a) Montrer que $D(A)$ est l'ensemble de points d'adhérence de A qui ne sont pas des points isolés.

(b) Soit $X = \mathbb{R}$ avec la topologie euclidienne, et $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $\overline{A}$, $D(A)$, $D(D(A))$, $D(\overline{A})$.

(c) Montrer que si X est un espace topologique Hausdorff, alors le dérivé d'un ensemble A est toujours fermé.

Exercice 3. Considerons $\mathbb{C}$ muni de la topologie induite par la valeur absolue et $A = \{\frac{t}{t+1}e^{\mathrm{i}t} \mid t \in \mathbb{R}_+\}$.

(a) Décrire partie intérieure, adhérence, frontière, points isolés, ensemble dérivé de A.

(b) Que se passe-t-il si on modifie la définition de A en prenant $t \in \mathbb{N}$?

Axiomes de séparabilité.

Soit X un espace muni d'une topologie τ. Si A, B sont deux sous-ensembles disjoints de X, on dit qu'ils sont *séparés* (par la topologie τ) s'il existe U voisinage ouvert de A et V voisinage ouvert de B tels que $A \cap B = \emptyset$. On considère les axiomes de séparabilité suivants :

T_0 : pour tout couple de points distincts $x, y \in X$, il existe un voisinage ouvert de l'un des deux qui ne contient pas l'autre point.

T_1 : pour tout couple de points distincts $x, y \in X$, il existe un voisinage ouvert de x ne contenant pas y, et un voisinage ouvert de y ne contenant pas x.

T_2 : la topologie sépare tout couple de points distincts.

T_3 : la topologie sépare tout point x de tout fermé A ne contenant pas x.

T_4 : la topologie sépare tout couple de fermés disjoints.

Un espace T_0 est aussi dit *Kolmogorov*, un espace T_1 est aussi dit *Fréchet*, un espace T_2 est aussi dit *Hausdorff*.

Exercice 4. On étudie les différentes conditions de séparabilité.

(a) Trouver un exemple d'espace topologique qui n'est pas T_0.

(b) Montrer que T_1 implique T_0. Trouver un exemple d'espace T_0 non T_1.

(c) Montrer que T_2 implique T_1. Trouver un exemple d'espace T_1 non T_2.

(d) Un espace qui satisfait T_0 et T_3 est dit *régulier*. Montrer que un espace régulier est T_2.

(e) Un espace qui satisfait T_1 et T_4 est dit *normal*. Montrer que un espace normal est T_3.

Exercice 5. Soit X un espace topologique Hausdorff et soient K_1 et K_2 deux compacts de X d'intersection vide. Montrer qu'il existe deux ouverts les séparant.

Exercice 6 (tout espace métrique est normal). Montrer que tout espace métrique est normal. *(Indication : pour toute couple de fermés disjoints A, B dans l'espace métrique X, construire une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(0) = A$ et $f^{-1}(1) = B$).*

Axiomes de dénombrabilité.

On dit qu'un espace topologique X est

- *séparable* : s'il admet un sous-ensemble dénombrable dense ;
- *à base dénombrable* (*second countable* en anglais) : s'il admet une base dénombrable d'ouverts ;
- *à bases dénombrables de voisinages* (*first countable* en anglais) : si tout point $x \in X$ admet une base dénombrable de voisinages ouverts.

Exercice 7. Soit X un espace topologique.

(a) Montrer que si X est à base dénombrable, alors il est séparable et à bases dénombrables de voisinages.

(b) Montrer que tout espace métrique est à bases dénombrables de voisinages.

(c) Montrer qu'un espace métrique est séparable si et seulement si il est à base dénombrable.

(d) Montrer que $\mathbb{R}^n$ avec la topologie induite par la distance éuclidienne est à base dénombrable.

(e) Donner un exemple d'espace métrique non séparable.

(f) Donner un exemple d'espace topologique séparable, mais pas à base dénombrable.

Exercice 8 (prébase et bases dénombrables). Soit (X, τ) un espace topologique. Une *prébase* de τ est une famille de sous-ensembles de X qui engendre τ.

(a) Montrer que (X, τ) est à base dénombrable si et seulement si τ admet une prébase dénombrable.

Soit X à base dénombrable, et $\mathcal{B} = \{U_j\}$ une base (pas forcement dénombrable) de τ.

(b) Montrer que pour tout $U = \bigcup_{j \in J} U_j$, il existe $M \subset J$ dénombrable tel que $U = \bigcup_{j \in M} U_j$.

(c) Montrer qu'il existe une sous-famille dénombrable de $\mathcal{B}$ qui engendre τ.

(d) Est-ce que ces conclusions restent vraies si on replace $\mathcal{B}$ par une prébase $\mathcal{P}$?

Exercice 9. Considerons $\mathbb{R}$ avec la topologie de Zariski τ : les fermés sont donnés par les ensembles finis et $\mathbb{R}$.

(a) Quels axiomes de séparabilité satisfait τ ?

(b) Quels axiomes de dénombrabilité satisfait τ ?

Soit $(x_n)_n$ une suite dans $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que l est une limite de la suite $(x_n)_n$ si et seulement si pour tout $x \neq l$, le nombre d'indices n tels que $x_n = x$ est fini.

(d) Déterminer les points d'accumulations d'une suite $(x_n)_n$ par rapport à la topologie de Zariski.

Exercice 10. Considerons $\mathbb{R}$ avec la topologie des démi-droites (positives) $\tau = \Big\{ \,]a, +\infty[\, : \; a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Big\}$.

(a) Quels axiomes de séparabilité satisfait τ ?

(b) Quels axiomes de dénombrabilité satisfait τ ?

(c) Soit X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réels. Montrer que f est continue par rapport à la topologie τ si et seulement si f est semi-continue inférieurement (i.e., $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$).

Exercice 11. Considerons $\mathbb{R}$ muni de la topologie τ engendrée par les segments fermé-ouverts, i.e., par

$$\mathcal{B} = \Big\{ \; [a, b[\;: \; a \leq b \in \mathbb{R} \Big\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de la topologie τ.

(b) Montrer que τ est plus fine que la topologie euclidienne de $\mathbb{R}$.

(c) Quels axiomes de séparabilité satisfait τ ?

(d) Quels axiomes de dénombrabilité satisfait τ ?

(e) Soit (x_n) une suite dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(x_n)_n$ converge vers une limite x_∞ dans la topologie τ si et seulement si x_n converge vers x_∞ de droite : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $x_\infty \leq x_n < x_\infty + \varepsilon$.

Connexité.

Exercice 12. Soit X un espace topologique et A, B deux parties de X.

(a) Montrer que si A et B sont connexes (resp., connexe par arcs), et $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe (resp., connexe par arcs).

(b) Montrer que si A est connexe, alors tout B tel que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.

(c) Est-ce que la propriété du point précédent vaut pour la connexité par arcs ?

Exercice 13 (composantes connexes).

(a) Soient X un espace topologique et A une partie non vide de X. Montrer que si A est ouvert, fermé et connexe alors A est une composante connexe de X.

(b) Dans $\mathbb{R}^2$ les ensembles suivants sont ils connexes : $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$? Quelles sont leurs composantes connexes ? Montrer que $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ou } y \in \mathbb{Q}\}$ est connexe par arcs.

(c) Soit $E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_{n-1}^2 - x_n^2 \neq 0\}$. Décrivez les composantes connexes de E_2 et E_3. Que peut-on dire de E_n pour $n \geq 4$?

Exercice 14 (caractérisation d'espaces connexes). Montrer qu'un espace topologique X est connexe si et seulement si toute partie E différente de $\emptyset$ et X a une frontière non vide.

Exercice 15 (application de la connexité aux homéomorphismes).

(a) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas homéomorphes.

Dans le plan affine euclidien on se donne un cercle $\mathcal{C}$.

(b) Prouver que tout cercle du plan est homéomorphe à $\mathcal{C}$.

(c) Prouver qu'un arc A de $\mathcal{C}$ (avec $A \neq \mathcal{C}$) n'est pas homéomorphe à $\mathcal{C}$.

Exercice 16 (connexe vs. connexe par arcs). Considerons $\mathbb{R}^n$ avec sa topologie induite par la distance éuclidienne.

(a) Montrer que si un espace topologique X est connexe par arcs, alors il est connexe.

(b) Montrer que un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.

(c) Donner un exemple d'espace connexe qui n'est pas connexe par arcs.

Exercice 17 (connexe vs. localement connexe). On rappelle qu'un espace topologique est *localement connexe* si tout point de cet espace admet une base de voisinages connexes.

(a) Montrer que dans un espace localement connexe toute composante connexe est ouverte. En déduire que $\mathbb{Q}$ n'est pas localement connexe.

(b) Montrer que tout sous-espace ouvert d'un espace localement connexe est encore localement connexe.

(c) Trouver un espace topologique localement connexe, non connexe.

(d) Trouver un espace connexe, non localement connexe (on pourra considérer l'espace $P = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\overline{S} \times \mathbb{R})$, où $S = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$; ce type d'espace est appelé génériquement un *peigne*).

(e) Trouver un espace topologique dans lequel tout point admet un voisinage connexe, mais qui n'est ni connexe, ni localement connexe.

Compacité

Exercice 18 (nombre de Lebesgue d'un recouvrement). Soit (E, d) un espace métrique compact muni d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$.
Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif ε tel que toute boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ de rayon ε, est contenue dans un des ouverts U_i du recouvrement.
(Un tel ε est dit nombre de Lebesgue du recouvrement.)

Exercice 19 (compactification d'Alexandroff). Soit (X, τ) un'espace topologique (non vide). Soit ∞ un point pas dans X. On considère sur $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ la famille de sous-ensembles $\hat{\tau}$ donnée par les ouverts U de X, et les complementaires dans $\hat{X}$ des ensembles fermés et compacts dans X.

(a) Montrer que $\hat{\tau}$ est une topologie sur $\hat{X}$.

(b) Montrer que $(\hat{X}, \hat{\tau})$ est compact.

L'espace topologique $(\hat{X}, \hat{\tau})$ est dit la *compactification de Alexandroff* (ou *à un point*) de (X, τ).

Exercice 20 (compacité séquentielle). On dit d'un espace topologique qu'il est *séquentiellement compact* si toute suite admet une sous-suite convergente.

(a) Montrer qu'un espace métrique compact est séquentiellement compact. Quelle propriété des espaces métriques on utilise ?

(b) Montrer qu'un espace métrique séquentiellement compact est *totalement borné* (i.e., pour tout $\delta > 0$, X est recouvert d'un nombre fini de boules ouvertes de rayon δ).

(c) Déduire qu'un espace métrique séquentiellement compact est compact.

Exercice 21 (théorème de compacité d'Alexander). Soit (X, τ) un espace topologique, et $\mathcal{P}$ une prébase de τ. Montrer que X est compact si et seulement si toute sous-famille de $\mathcal{P}$ qui recouvre X admet un sous-recouvrement fini.

Applications continues

Exercice 22. Soient E, F deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f : E \to F$ est ouverte lorsqu'elle transforme tout ouvert de E en un ouvert de F.

(a) Donner un exemple d'application continue non ouverte et un exemple d'application ouverte non continue.

(b) Montrer que $f : X \to Y$ est ouverte si et seulement si pour toute partie A de X, on a $f(A^\circ) \subseteq f(A)^\circ$.

(c) Que peut-on dire d'une application $f : E \to F$ qui est à la fois bijective, continue et ouverte ?

Exercice 23. Soient X et Y deux espaces topologiques, F_1 et F_2 deux fermés de X et $f_1 : F_1 \to Y$ et $f_2 : F_2 \to Y$ deux applications continues dont les restrictions à l'intersection $F_1 \cap F_2$ coïncident. Alors l'application $h : F_1 \cup F_2 \to Y$ définie par $h(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ si } & x \in F_1 \\ f_2(x) \text{ si } & x \in F_2 \end{cases}$ est continue.

Exercice 24. Montrer que :

(a) L'application $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur la boule unité ouverte.

(b) L'application $f : [0, 1[\to S^1$, $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ est bijective, continue mais n'est pas un homéomorphisme.

(c) $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ et $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ sont deux ouverts homéomorphes de $\mathbb{C}$.

Exercice 25. Soit X un espace compact, Y un espace Hausdorff, et $f : X \to Y$ une application continue.

(a) Montrer que f est *propre* (i.e., pour tout compact K de Y, $f^{-1}(Y)$ est un compact de X).

(b) Montrer que f est fermée.

(c) En déduire que si f est une bijection, alors f est un homéomorphisme.